Partiel du cours de Topologie et Calcul différentiel

Durée : 2h. Les documents ne sont pas autorisés. On attend de vous des copies propres et lisibles et une rédaction claire et précise. Vous pouvez choisir de répondre *en français ou en anglais.*

Description du sujet : Le sujet est composé de 4 exercices *indépendants*, que vous trouverez sur chacune des 4 pages qui composent le sujet. L'exercice 1 étudie la topologie séquentielle associée à une topologie. L'exercice 2 étudie un contre-exemple qui montre que l'adhérence d'une partie A n'est pas égale à l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A. L'exercice 3 démontre un théorème (Fiber Contraction Theorem en anglais) et étudie une application à un exemple d'équation fonctionnelle. Enfin, l'exercice 4 étudie la topologie télophase.

Barême : Il sera déterminé en fonction de vos copies mais il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une très bonne note, ni même pour avoir 20/20.

Rappel : On adopte la définition française des compacts !

Exercice 1 : Topologie séquentielle

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est

- séquentiellement fermée (en abrégé s-fermée) si pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et pour tout $x \in X$, $x_n \to_{n\to+\infty} x \implies x \in A$;
- séquentiellement ouverte (en abrégé s-ouverte) si pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et pour tout $x \in A$, $x_n \to_{n\to+\infty} x \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in A$

1. a) Montrer que si A est s-ouverte alors $A^c = X \setminus A$ est s-fermée.
   b) Montrer que si A est s-fermée, alors A^c est s-ouverte.
2. On définit la famille $\mathcal{T}_s \subset \mathcal{P}(X)$ comme étant l'ensemble des parties séquentiellement ouvertes de X.
   a) Montrer que $\mathcal{T}_s$ est une topologie.
   b) Comparer $\mathcal{T}_s$ et $\mathcal{T}$.
   c) On suppose (*uniquement dans cette question*) que tout point $x \in X$ possède une base dénombrable de voisinages. Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_s$.
3. Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $x \in X$. Montrer que (x_n) converge vers x au sens de la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si (x_n) converge vers x au sens de la topologie $\mathcal{T}_s$.
4. **Un exemple où les topologies ne coïncident pas.** On considère $X = [0,1]^{[0,1]}$, muni de la topologie produit. On note A l'ensemble des applications qui s'annulent excepté en un nombre au plus dénombrable de points.
   a) Montrer que A est séquentiellement fermée.
   b) Montrer que A est dense dans X (pour la topologie produit). En particulier, A n'est pas fermée.

Exercice 2 : L'adhérence n'est pas égal à l'ensemble des limites

Dans cet exercice, on construit un contre-exemple qui montre que l'adhérence d'une partie A n'est pas égale à l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A.

On considère l'espace topologie $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de la topologie produit. On notera

$$f_{k,j}(x) = (\cos(k!\pi x))^{2j}$$

et on considère $A = \{f_{k,j}, k, j \in \mathbb{N}\} \subset X$.

1. a) Démontrer la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{k \to +\infty} \lim_{j \to +\infty} f_{k,j}(x)$$

   b) En déduire que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \overline{A}$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f_n \to f$ simplement. On veut montrer que f est continue sur une partie dense. Pour $k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$, on note

$$F_{n,k} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}; \forall p, q \geq n, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}\},\ \Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{F}_{n,k} \text{ et } \Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$$

   a) Montrer que si $x \in \Omega$, alors f est continue en x.
   b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est dense dans X. On pourra commencer par montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{n,k} = \mathbb{R}$.
   c) Conclure.

3. En utilisant la propriété démontrée à la question précédente, montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas limite d'éléments de A.

Exercice 3 : Fiber Contraction Theorem

1. Soit (X, d_X) un espace métrique et $f : X \to X$ continue. On note f^n la n-ième itérée de f pour la composition. On suppose que f possède un unique point fixe $x_0 \in X$ et que celui-ci est attractif au sens où pour tout $x \in X$,
$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = x_0$$
Soit (Y, d_Y) un second espace métrique et $g : X \times Y \to Y$ continue telle qu'il existe $\nu \in [0, 1[$ tel que
$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, d_Y(g(x, y_1), g(x, y_2)) \leq \nu d_Y(y_1, y_2)$$
On suppose enfin que $g(x_0, \cdot) : Y \to Y$ possède un point fixe y_0 (nécessairement unique). On pose $H : (x, y) \in X \times Y \mapsto (f(x), g(x, y)) \in X \times Y$. L'objectif de cette question est de montrer pour tout $(x, y) \in X \times Y$,
$$\lim_{n\to+\infty} H^n(x, y) = (x_0, y_0)$$
Dans la suite, on fixe $(x, y) \in X \times Y$.
   a) Proposer (sans démonstration) une distance d qui métrise la topologie produit de $X \times Y$.
   b) Montrer que $d\left(H^n(x, y), H^n(x, y_0)\right) \to 0$.
   c) On note y_n la composante en y en $H^n(x, y_0)$ et $a_n = d_Y(g(f^{n-1}(x), y_0), y_0)$. Montrer que
$$d_Y\left(y_0, y_n\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\nu^k$$
   d) Conclure.
2. On souhaite appliquer le résultat de la question précédente à un problème d'équation fonctionnelle. On se donne deux applications $a, \lambda \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ et on suppose que $\sup_{x\in[-1,1]} |\lambda(x)| \leq \frac{1}{2}$. On pose $X = (C^0([-1, 1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ et on définit $F : X \to X$ par
$$\forall \gamma \in X, \forall x \in [-1, 1], (F\gamma)(x) = a(x) + \lambda(x)\gamma(x/2)$$
   a) Montrer que $F : X \to X$ est bien définie et possède un unique point fixe attractif. On le notera γ_0.
   On définit à présent $G : X \times X \to X$ par
$$\forall \gamma, \delta \in X, \forall x \in [-1, 1], \quad G(\gamma, \delta)(x) = a'(x) + \frac{1}{2}\lambda(x)\delta(x/2) + \lambda'(x)\gamma(x/2)$$
   b) Montrer que $G(\gamma_0, \cdot)$ possède un unique point fixe que l'on notera δ_0. Enfin, on note comme à la question précédente,
$$H : (\gamma, \delta) \in X \times X \mapsto (F\gamma, G(\gamma, \delta)) \in X \times X$$
   c) Soit $\gamma \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H^n(\gamma, \gamma') = \big(F^n\gamma, (F^n\gamma)'\big)$.
   d) En appliquant le résultat de la question 1, montrer que γ_0 est C^1 et identifier sa dérivée.
   e) On suppose que a et λ sont C^2. En adaptant la stratégie précédente, montrer que g est C^2.

Exercice 4 : Topologie télophase

On considère l'ensemble $X = [0,1] \sqcup \{1^*\}$ où 1^* est un élément quelquonque n'appartenant pas à $[0,1]$.
On définit une topologie $\mathcal{T}$ sur X par $U \in \mathcal{T} \iff \Big[U \cap [0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$ pour la topologie usuelle (euclidienne) de $[0,1]$ et $(1^* \in U \implies \exists a \in]0,1[,]a,1[\subset U)\Big]$

On admet que $\mathcal{T}$ est une topologie.

1. Cette topologie est-elle séparée ?
2. On définit l'application

$$f : x \in [0,1] \subset X \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1[\\ 1^* \text{ si } x = 1 \end{cases} \in [0,1[\sqcup \{1^*\} \subset X$$

   Montrer que f est un homémorphisme, où l'on a muni chacun des espaces de départ et d'arrivée de la topologie induite par celle de X.
3. Parmi les espaces topologiques suivants (tous munis de la topologie induite par celle de X), lesquels sont compacts ? Vous justifierez succinctement votre réponse.
   a) $[0,1]$
   b) $[0,1[\sqcup \{1^*\}$
   c) $X = [0,1] \cup ([0,1[\sqcup \{1^*\})$
   d) $[0,1] \cap [0,1[\sqcup \{1^*\}$
4. On définit sur $[-1,1]$ la relation d'équivalence (on ne demande pas de vérifier que c'en est une) suivante :

$$a \sim b \iff a = b \text{ ou } \Big(|a| < 1, |b| < 1 \text{ et } |a| = |b|\Big)$$

   On considère sur $Y = [-1,1]/\mathcal{R}$ la topologie quotient.
   a) Montrer que Y et X sont homéomorphes.
   b) En déduire que $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arc.

FIN